**Herleitung des normierten Bewegungsgesetzes**
**Polynom 5. Grades R-R**

Bei einem normierten Bewegungsgesetz f(z) läuft der Antriebsparameter z von 0 bis 1.
Für die Funktionswerte gilt: f(0) = 0 und f(1) = 1.
Für ein Rast-in-Rast-Bewegungsgesetz (R-R) gilt außerdem:
f'(0) = 0, f'(1) = 0, f''(0) = 0, f''(1) = 0

Es soll ein Polynom hergeleitet werden, das genau diese 6 Interpolationsbedingungen einhält. Das Polynom benötigt dann auch 6 Koeffizienten $a_0$ bis $a_5$.
Das gesuchte Polynom ist damit ein Polynom 5. Grades.

Zunächst noch einmal die 6 Interpolationsbedingungen als Ausgangspunkt der Herleitung:

(1) $f(0) = 0$
(2) $f'(0) = 0$
(3) $f''(0) = 0$
(4) $f(1) = 1$
(5) $f'(1) = 0$
(6) $f''(1) = 0$

Das normierte Polynom 5. Grades f(z) und seine Ableitungen f'(z) und f''(z) haben folgende allgemeine Darstellung:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5$$
$$f'(z) = a_1 + 2\, a_2 z + 3\, a_3 z^2 + 4\, a_4 z^3 + 5\, a_5 z^4$$
$$f''(z) = 2\, a_2 + 6\, a_3 z + 12\, a_4 z^2 + 20\, a_5 z^3$$

Damit werden die Gleichungen (1) bis (6) zu folgendem linearen Gleichungssystem für die Koeffizienten $a_0$ bis $a_5$:

(1) $a_0 = 0$
(2) $a_1 = 0$
(3) $a_2 = 0$
(4) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$
(5) $a_1 + 2\, a_2 + 3\, a_3 + 4\, a_4 + 5\, a_5 = 0$
(6) $2\, a_2 + 6\, a_3 + 12\, a_4 + 20\, a_5 = 0$

bzw. mit $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ und $a_2 = 0$:

(4) $a_3 + a_4 + a_5 = 1$
(5) $3\, a_3 + 4\, a_4 + 5\, a_5 = 0$
(6) $6\, a_3 + 12\, a_4 + 20\, a_5 = 0$

Zieht man (4) drei Mal von (5) ab, ergibt sich:

(7) $a_4 + 2\, a_5 = -3$

Zieht man (4) sechs Mal von (6) ab, ergibt sich:

(8) $6\,a_4 + 14\,a_5 = -6$

Zieht man (7) sechs Mal von (8) ab, ergibt sich:

(9) $2\,a_5 = 12$

Damit ist

$a_5 = 6$
$a_4 = -3 - 2\,a_5 = -15$
$a_3 = 1 - a_4 - a_5 = 10$

**Zusammengefasst:**

$f(z) = 6\,z^5 - 15\,z^4 + 10\,z^3$

$f'(z) = 30\,z^4 - 60\,z^3 + 30\,z^2$

$f''(z) = 120\,z^3 - 180\,z^2 + 60\,z$